Proposition de sujet de thèse en Mathématiques Appliquées

Approximations sur la sphère par des méthodes précises, stables et rapides

Lieu : Laboratoire de Mathématiques et Applications, Université de Poitiers, CNRS, F-86073 Poitiers, France

Encadrants :

- Jean-Baptiste Bellet, Professeur, jean.baptiste.bellet@univ-poitiers.fr, membre de l'équipe Equations aux Dérivées Partielles (EDP), et de l'équipe Data Analysis and Computation Through Imaging and Modeling-Maths Images Santé (DACTIM-MIS)
- Mattieu Brachet, Maître de conférences, matthieu.brachet@math.univ-poitiers.fr, membre de l'équipe EDP

(Taux d'encadrement : JBB 70%, MB 30%)

Mots clés : Interpolation, moindres carrés, harmoniques sphériques, grilles sphériques, transformée de Fourier rapide

Descriptif de la thèse

De nombreux domaines scientifiques nécessitent d'approcher des données sphériques ou de résoudre des équations posées sur la sphère. Il s'agit d'un sujet très ancien, remontant au moins à la fin du XVIIIe siècle, lorsque Legendre et Laplace ont introduit les harmoniques sphériques pour étudier la théorie gravitationnelle. De nos jours, on peut citer la climatologie, où les modèles nécessitent la résolution d'EDP, ou bien l'imagerie par Résonance Magnétique de diffusion [5], où la transformation de Funk-Radon intervient.

1. Approximation de données sur une grille sphérique

Dans cette thèse, on propose d'élaborer des schémas de calcul sphérique, stables et précis, dans la continuité de travaux avec J.-P. Croisille (Université de Lorraine) [1-3]. Dans un premier temps, on envisage de considérer des problèmes d'approximation de type moindres carrés ou interpolation, sur des grilles sphériques comme la cubed sphere, ou la grille icosaédrale. Les questions qui restent ouvertes concernent tant les aspects théoriques que numériques. En voici deux.

- Dans le cas des moindres carrés dans un espace d'harmoniques sphériques, nous réglons empiriquement le degré pour assurer un bon conditionnement, mais nous n'avons pas de preuve générale. Ce type de question est relié à la compréhension fine de la structure géométrique de la grille utilisée, dont les propriétés jouent un rôle essentiel, tant en théorie qu'en pratique.
- Une formule de quadrature sur la cubed sphere, très simple, a pour ordre numérique de convergence 6 ; elle n'a pas encore été publiée car la preuve de l'ordre reste ouverte. Il s'agit d'un résultat de convergence intéressant qui souligne des compensations inattendues d'erreurs.

2. Algorithmes de calcul rapide

On souhaite développer une nouvelle méthode d'approximation de données sur la sphère, qui soit à la fois rapide, stable et précise. Pour débuter, on propose de combiner :

- les moindres carrés par des harmoniques sphériques sur la cubed sphere,
- un solveur itératif performant basé sur la transformée de Fourier sphérique rapide [6-7].

En effet, l'approche par moindres carrés est relativement stable et précise, tandis que grâce au bon conditionnement, les solveurs itératifs, de type Conjugate Gradient Least Squares (CGLS), ou série de Neumann, convergent « rapidement » (quelques itérations). Le coût de calcul est dans ce cas essentiellement dû à l'évaluation de produits entre la matrice de Vandermonde (harmoniques sphériques évaluées sur la grille) et les coefficients spectraux recherchés. Pour gagner en efficacité, on envisage d'évaluer ces produits à l'aide de méthodes de type transformée de Fourier sphérique rapide, éventuellement à optimiser pour tenir compte de la structure de la grille choisie.

Il conviendra de comparer cette approche à l'état de l'art, dont la méthode des séries de Fourier double sur la sphère. Aussi, il serait souhaitable d'estimer précisément le coût de calculs, et d'estimer l'erreur d'approximation d'une fonction d'un espace de Sobolev (par exemple).

Pour aller plus loin, toute nouvelle approche, stable, rapide et précise, serait la bienvenue. La structure dyadique de certaines familles de grilles (comme la cubed sphere ou la grille icosaédrale) pourrait constituer une piste à exploiter. A noter que l'espace fonctionnel fait partie des leviers sur lesquels on peut agir. Il n'est pas exclu de tester des espaces de réseaux de neurones, notamment pour approcher des fonctions singulières.

3. Applications

Au final, de nouvelles méthodes d'approximation rapides, stables et précises, laissent entrevoir des perspectives de construction de nouveaux schémas d'opérateurs de dérivation et d'opérateurs intégraux, avec possibilité de monter en résolution, et avec applications à la résolution de différentes EDP ou équations intégrales sur la sphère. Le principe général étant de tirer profit des propriétés des harmoniques sphériques, pour les intégrer ou les dériver.

En guise de problème modèle issu de la climatologie, on pourra considérer l'équation d'advection sur la sphère, et comparer tant en précision qu'en performance avec des schémas existants [4]. Ceci nécessite de définir un opérateur de dérivation tangentielle. Une piste est de travailler sur des grands cercles : sur un grand cercle, un polynôme harmonique est un polynôme trigonométrique que l'on peut interpoler, puis dériver, par transformation de Fourier rapide.

On pourra aussi considérer des opérateurs d'intégration, et notamment la transformation de Funk (intégration sur les grands cercles). Le but principal ici étant de tester l'aspect rapide des schémas d'approximation introduits, en montant le plus possible en résolution.

Références

[1] J.-B. Bellet, M. Brachet, and J.-P. Croisille, Quadrature and symmetry on the Cubed Sphere, Journal of Computational and Applied Mathematics, 409 (2022).

[2] J.-B. Bellet, M. Brachet, and J.-P. Croisille, Interpolation on the Cubed Sphere with Spherical Harmonics, Numerische Mathematik, 153 (2023), pp. 249-278.

[3] J.-B. Bellet and J.-P. Croisille, Least Squares Spherical Harmonics Approximation on the Cubed Sphere, Journal of Computational and Applied Mathematics, 429 (2023).

[4] M. Brachet, Schémas compacts hermitiens sur la Sphère: applications en climatologie et océanographie numérique, Thèse de doctorat, Université de Lorraine, 2018.

[5] M. Descoteaux, E. Angelino, S. Fitzgibbons, and R. Deriche, Regularized, Fast, and Robust Analytical Q-Ball Imaging, Magnetic Resonance in Medicine, 58 (2007), pp. 497-510.

[6] J. Keiner and D. Potts, Fast evaluation of quadrature formulae on the sphere, Mathematics of computation, 77 (2008), pp. 397-419.

[7] S. Kunis and D. Potts, Fast spherical Fourier algorithms, Journal of Computational and Applied Mathematics, 161 (2003), pp. 75-98.